

Varianta 072

Subiectul I

- a) $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$
 b) $\cos^2 2006 + \sin^2 2006 = 1$
 c) Aria este $\frac{3\sqrt{3}}{4}$
 d) $z = -2 - 3i \Rightarrow \bar{z} = -2 + 3i$
 e) Obțin sistemul $\begin{cases} 2 + 4a + b = 0 \\ 5 + 7a + b = 0 \end{cases}$ cu soluția $\begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}$
 f) Aplicând teorema lui Pitagora am $BC = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$

Subiectul II

1.

- a) $\begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} = -40 + 42 = 2$
 b) Deoarece numai 1, 2, 3, 4 verifică inegalitatea, probabilitatea cerută este $\frac{4}{5}$
 c) $3^x - 27 = 0 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \Leftrightarrow x = 3$
 d) $\log_6 x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$
 e) $E = C_6^1 - C_6^5 + C_6^6 = C_6^1 - C_6^1 + C_6^6 = 1$

2.

- a) $f'(x) = \frac{-1}{(x+2006)^2}, (\forall)x > 0$
 b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{-1}{2007^2}$
 c) Din a) $f'(x) < 0, (\forall)x > 0 \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$
 d) $\int_1^2 f(x) dx = [3x + \ln(x+2006)]_1^2 = 6 + \ln 2008 - 3 - \ln 2007 = 3 + \ln \frac{2008}{2007}$
 e) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n+2006} \right) = 3$

Subiectul III

- a) $0 = 0 + 0 \cdot \omega$ și $1 = 0 + 1 \cdot \omega$ deci $0 \in M, 1 \in M$.
 b) $\omega^2 = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 8 - 4\sqrt{3} - 1 = 4(2 - \sqrt{3}) - 1 = 4\omega - 1$
 c) Fie $z, x \in M \Rightarrow (\exists)a, a', b, b' \in \mathbf{Z}$ cu $z = a + b\omega$ și $y = a' + b'\omega$

Am $z + y = (a + a') + (b + b')\omega \in M$ și

$$z \cdot y = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b' \omega^2 = a \cdot a' + (a \cdot b' + a' \cdot b)\omega + b \cdot b'(4\omega - 1) = (a \cdot a' - b \cdot b') + (a \cdot b' + a' \cdot b + 4b'b)\omega \in M.$$

d) $(a + b\omega)(a + b\bar{\omega}) = a^2 + b^2\omega\bar{\omega} + ab(\omega + \bar{\omega}) = a^2 + b^2 + 4ab \in \mathbf{Z}$ căci $a, b \in \mathbf{Z}$

e) $\omega = 0 + 1 \cdot \omega \in M$, $\bar{\omega} = 4 - \omega \in M$ și cum $\omega\bar{\omega} = 1$ rezultă $\omega \in G$.

f) Deoarece $\omega \in G$ rezultă $\omega \cdot \omega = \omega^2 \in G$ și prin inducție $\omega^n \in G (\forall) n \in \mathbf{N}^*$. Atunci $\{\omega, \omega^2, \dots, \omega^{2006}\} \subset G$ și $\omega^i \neq \omega^j (\forall) i \neq j$. Deci G conține cel puțin 2006 elemente.

$$g) \omega^{2006} = (2 - \sqrt{3})^{2006} = C_{2006}^0 2^{2006} + C_{2006}^2 2^{2004} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2006} 3^{1003} - \sqrt{3}(C_{2006}^1 2^{2005} + C_{2006}^3 2^{2003} \cdot 3 + \dots + C_{2006}^{2005} 2 \cdot 3^{1002}) = a - b\sqrt{3}$$

cu $b \neq 0$ și $a, b \in \mathbf{Q}$; deci $\omega^{2006} \notin \mathbf{Q}$.

Subiectul IV

a) $f'(x) = -2 \cdot 2^{-2x} \ln 2, (\forall) x \in \mathbf{R}$

b) $f'(x) < 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$ evident (din a)) și $f(x) > 0, (\forall) x \in \mathbf{R}$ (din imaginea exponențială)

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3 \Rightarrow y = 3$ asimptotă orizontală pentru f către $+\infty$

$$d) \int_0^1 f(x) dx = \left(3x - \frac{e^{-2x}}{2 \ln 2} \right) \Big|_0^1 = 3 - \frac{1}{2e \ln 2} + \frac{1}{2 \ln 2}$$

e) $f'(x) < 0, (\forall) x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $\mathbf{R}$

$$f) \frac{1}{2}((f'(x))^2 + f'(x) + 1) - \frac{1}{2}((f'(x))^2 - f'(x) + 1) = \frac{1}{2}(f'(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(f'(x))^2 + \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2} = f'(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$$

g) De exemplu : $g, h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = 3 - 2^{-2x}$ și $h(x) = -2 \cdot 2^{-2x}$ sunt strict crescătoare pe $\mathbf{R}$ și am $f(x) = g(x) - h(x), (\forall) x \in \mathbf{R}$